Chapitre XVIII

ÉQUATIONS DE MAXWELL.

XVIII-1 Historique

- Dans l'antiquité, on avait observé que l'ambre (τo $\mathring{\eta}\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$) frottée attire les objets légers et que l'aimant attire le fer. Au XIIème siècle, la boussole nous arrive de Chine.
- Après Franklin qui découvre les deux sortes de charges (qu'il baptise positive et négative) et Cavendish qui développe la notion de condensateur, Priestley de façon indirecte en 1771 et Coulomb directement en 1785 découvrent la loi d'interaction en $1/r^2$, imprégnés qu'ils étaient de la découverte antérieure de la gravitation universelle par Newton en 1687. Gauss, Poisson, entre autres, développent l'électrostatique.
- En 1790, Galvani est intrigué par les mouvements d'une grenouille accrochée et tripotée par un clou ; en 1796, Volta comprend que la grenouille n'est pas la cause du phénomène et invente la pile électrochimique, en empilant (d'où le nom de pile) rondelles de cuivre, de fer et de feutre imprégné de sel. Ampère, Ohm, Kirschhoff, Joule, entre autres, développent l'électrocinétique.
- En 1819, Oersted découvre qu'une boussole dévie quand on la place près d'un fil parcouru par un courant. Biot, Savart, Weber, entre autres, développent la magnétostatique.
- En 1831, Faraday découvre l'induction ; en 1885, Foucault découvre les courants induits dans des masses métalliques. Développements grâce, entre autres, à Henry, Lenz, Neumann, Tesla.
- En 1864, Maxwell présente les lois d'une théorie unifiée de l'électromagnétisme, affinée plus tard par Lorentz. En 1885, Hertz réussit à émettre et à capter des ondes électromagnétiques prévues par la théorie.
- En 1884, J.J. Thomson découvre l'électron et ouvre la voie à la physique atomique.
- Les équations de Maxwell posent deux problèmes aux physiciens : la recherche d'un référentiel privilégié où la vitesse de la lumière est c (l'échec de cette recherche conduit Einstein à concevoir la théorie de

la relativité en 1905) et l'impossibilité énergétique d'une orbite stable de l'électron autour du noyau (ce qui amène Bohr, puis de Broglie, puis Schrödinger à la mécanique quantique).

XVIII-2 Charges et courants

XVIII-2.a Charges

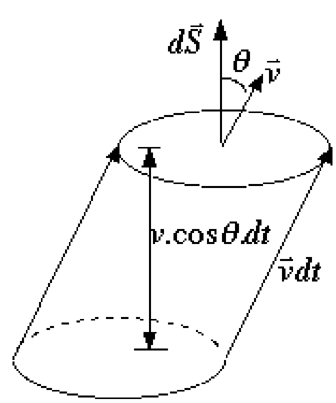
La matière est constituée d'électrons de charge $-e$ et de noyaux de charges positives, assemblés en atomes ou molécules neutres et ions des deux signes. Appelons $\mathrm{d}q$ la charge totale contenue dans un volume élémentaire $\mathrm{d}\Omega$. Il est raisonnable de penser que si l'on divise ce volume en deux, il en est de même pour la charge, donc que la charge est proportionnelle au volume à cette échelle. On introduit donc une charge volumique définie par $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}\Omega$. Plus prudemment si le milieu contient plusieurs types de charges (électrons libres et ions métalliques dans un métal ; ions H_3O^+ et OH^- dans l'eau, etc.), on décompose $\mathrm{d}q$ par types de charges et ρ aussi :

$$\mathrm{d}q = \sum \mathrm{d}q_i \qquad \rho = \sum \rho_i \qquad \rho_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\Omega}$$

XVIII-2.b Courants

Supposons une petite région de l'espace où les charges de type i ont une densité volumique ρ_i et une vitesse moyenne $\overrightarrow{v_i}$ de module v_i. Soit une petite surface élémentaire orientée $\mathrm{d}S$ de vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (rappelons qu'il est orthogonal à la surface, orienté dans le sens choisi et de module égal à l'aire de la surface). Cherchons à calculer la charge δq_i (de type i) qui traverse $\mathrm{d}S$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Pour cela localisons les charges concernées à l'instant initial t. Leurs trajectoires doit traverser $\mathrm{d}S$, elles doivent être en amont de la surface à une distance inférieure à $v_i\,\mathrm{d}t$. Elles sont donc (cf figure ci-dessous) contenues dans un cylindre oblique de base $\mathrm{d}S$ et de hauteur $v_i\,\mathrm{d}t\,\cos\theta$. On a donc :

$$\delta q_i = \rho_i\,\mathrm{d}S\,v_i\,\mathrm{d}t\,\cos\theta = \rho_i\,\overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t$$



Si l'on somme sur tous les types de charges, on a :

$$\delta q = \sum \rho_i \, \overrightarrow{v_i} . \overrightarrow{\mathrm{d}S} \, \mathrm{d}t$$

et l'intensité élémentaire est $\mathrm{d}I = \delta q / \mathrm{d}t = \sum \rho_i \, \overrightarrow{v_i} . \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

On appelle densité de courant le vecteur $\overrightarrow{\jmath} = \sum \rho_i \, \overrightarrow{v_i}$, d'où $\mathrm{d}I = \overrightarrow{\jmath} . \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

Attention : à la différence de la mécanique des fluides, où toutes les entités ont pratiquement la même vitesse et où l'on peut donc écrire $\overrightarrow{\jmath} = \rho \, \overrightarrow{v}$, c'est trop dangereux ici, car dans la plupart des milieux ρ est nul (milieu électriquement neutre) sans que $\overrightarrow{\jmath}$ le soit ; il suffit pour cela qu'il y ait autant de charges positives que négatives et que les unes aillent dans un sens et les autres dans l'autre sens.

XVIII-2.c Conservation de la charge

Imaginons un volume Ω divisé en volumes élémentaires $\mathrm{d}\Omega$ et limité par une surface fermée Σ divisée en surfaces élémentaires de vecteurs surfaces $\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$. Appelons $Q(t)$ la charge contenue dans Ω à l'instant t. Evaluons de deux façons la dérivée temporelle de cette charge.

Première approche :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\Omega} \mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \mathrm{d}\Omega$$

Deuxième approche : $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ est l'intensité entrant dans Ω donc l'opposé de l'intensité sortante soit :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = - \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = - \iiint_{\Omega} \mathrm{div} \, \overrightarrow{\jmath} \, \mathrm{d}\Omega$$

En égalant les deux expressions, on tire :

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, \overrightarrow{\jmath} \right) \mathrm{d}\Omega$$

Pour que ceci soit vrai quel que soit le domaine Ω, il faut que la fonction à intégrer soit identiquement nulle donc la conservation de la charge peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, \overrightarrow{\jmath} = 0$$

Il s'agit de la formulation locale (c'est à dire valable en un point, c'est-à-dire encore en termes de champs) d'une loi macroscopique ($Q(t)$ constant) exprimée pour un système non ponctuel. Nous nous intéresserons assez à cette dualité de formulation cette année.

XVIII-3 Force de Lorentz

XVIII-3.a Champ électromagnétique

On pourrait être tenté de chercher une formule qui remplace la loi de Coulomb pour calculer la force qui s'exerce entre deux charges, non plus immobiles, mais en mouvement. C'est déjà déraisonnable en physique classique, puisque cela suppose les interactions instantanées, même à grande distance ; c'est tout à fait impossible en mécanique relativiste où le temps n'est plus absolu. Plutôt que dire que la charge 1 exerce une action sur la charge 2, on préfère dire que la charge 1 modifie l'espace et que la charge 2 interagit avec l'espace modifié. Pour l'interaction électromagnétique, la déformation est décrite par un couple de deux champs appelés champ électrique et champ magnétique. Il faut bien comprendre aussi que ces deux champs forment une entité *indissociable* appelée champ électromagnétique. Du reste, en mécanique relativiste, ce champ est représenté par une matrice 4x4 antisymétrique à six composantes indépendantes, six comme le couple de deux vecteurs à 3 dimensions.

La force $\overrightarrow{F}$ subie par une charge q animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ et placée dans le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est donnée par la formule suivante et s'appelle force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

XVIII-3.b Force et puissance exercées sur un volume élémentaire

Soit un volume élémentaire $\mathrm{d}\Omega$ contenant différents types de charges $\mathrm{d}q_i = \rho_i\,\mathrm{d}\Omega$ animés de vitesses $\overrightarrow{v_i}$; on notera $\rho = \sum_i \rho_i$ et $\overrightarrow{\jmath} = \sum_i \rho_i\,\overrightarrow{v_i}$. La force subie par ce volume est alors :

$$\sum_i \overrightarrow{\mathrm{d}F_i} = \sum_i \mathrm{d}q_i\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{B}) = (\rho\,\overrightarrow{E} + \overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{B})\,\mathrm{d}\Omega$$

d'où le concept de force volumique $\rho\,\overrightarrow{E} + \overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{B}$ qui se réduit dans la quasi-totalité des cas (milieux électriquement neutres à l'échelle locale) à $\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{B}$.

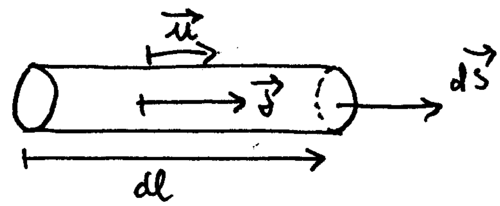
De même la puissance élémentaire est, en remarquant que le produit mixte avec deux fois le même vecteur est nul :

$$\sum_i \overrightarrow{\mathrm{d}F_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = \sum_i \mathrm{d}q_i\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{v_i} = \sum_i \mathrm{d}q_i\,\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{E}\,\mathrm{d}\Omega$$

d'où une puissance volumique $\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{E}$

XVIII-3.c L'élément de courant filiforme

Un élément de circuit filiforme de longueur vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ a en fait une section S très faible mais non nulle ; il est donc limité par un vecteur surface $\overrightarrow{S}$



parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. De plus il canalise le courant, donc $\overrightarrow{\jmath}$ est parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, notons donc $\overrightarrow{u}$ leur vecteur unitaire. On notera $\overrightarrow{\jmath} = j\,\overrightarrow{u}$ et ainsi de suite.L'intensité est dès lors $I = j\,S$.

La neutralité électrique conduit à une force élémentaire :

$$\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{B}\,\mathrm{d}\Omega = j\,\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{B}\,\mathrm{d}l\,S = j\,S\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{B} = I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B}$$

On reconnaît, bien sûr, la force de Laplace.

De façon plus générale et pour les mêmes raisons, on peut adapter aux circuits filiformes une formule quelconque en remplaçant $\overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{d}\Omega$ par $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

XVIII-4 Les équations de Maxwell

XVIII-4.a Présentation locale

Outre la force de Lorentz, les lois de l'électromagnétisme sont contenues dans les équations de Maxwell qui suivent :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right)$$

Les deux premières sont des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique et les deux dernières le lien entre celui-ci et les charges et courants qui le créent.

μ_0 et ε_0 sont des constantes qui sont liées au choix des unités. Dans le système international, le choix de l'Ampère comme unité d'intensité revient à choisir $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$. On verra un tout petit peu plus loin que la vitesse c de la lumière est liée à μ_0 et ε_0 par la relation $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$; comme $c \approx 3.10^8$ à un pour mille près, on en tire la valeur de ε_0, cela dit c'est surtout $\dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \approx 9.10^9$ qu'il faut retenir.

Remarque : Des équations de Maxwell, on tire $\rho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}$ et

$$\overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} - \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Formons la combinaison $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath}$; comme les opérateurs div et $\dfrac{\partial}{\partial t}$ commutent et que la divergence d'un rotationnel est nulle, on trouve 0, c'est à dire que les équations de MAXWELL sont compatibles avec la conservation de la charge. En fait, MAXWELL a ajouté le terme $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ à la quatrième équation pour assurer cette compatibilité. Dans les expériences de l'époque, ce terme était négligeable devant $\overrightarrow{\jmath}$ (on verra plus loin qu'il s'agit de ce qu'on appelle le régime quasi-stationnaire) et était donc passé inaperçu. Cet ajout a permis de prédire la possibilité d'ondes électromagnétiques, ondes qui furent produites vingt ans plus tard par HERTZ ; c'est ainsi que progresse la physique par d'incessants allers-retours entre expérience et théorie.

XVIII-4.b Présentation intégrale

Bien sûr, ce n'est pas sous cette forme élaborée qu'ont été énoncées les équations de MAXWELL, il s'agit ici de la présentation moderne en termes de champs, c'est-à-dire une formulation locale. Retrouvons la formulation historique faisant apparaître des intégrales de flux ou de circulation.

Partons de la troisième équation et imaginons une surface fermée Σ orientée vers l'extérieur, découpée en éléments de vecteurs surfaces $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et limitant un volume Ω découpé en éléments de volume $\mathrm{d}\Omega$. Le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI conduit à :

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{\Omega} \rho\,\mathrm{d}\Omega = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On retrouve le théorème de GAUSS, mais valable même en régime non stationnaire, c'est-à-dire en dehors de l'électrostatique. La troisième équation de MAXWELL s'appelle donc aussi équation de MAXWELL-GAUSS.

De la même façon, la première équation, qui n'a reçu aucun nom particulier, conduit à :

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$$

donc $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif ; on rappelle les deux corollaires : les flux magnétiques à travers deux surfaces de même contour, orientées dans le même sens, sont identiques ; de même que les deux flux à travers deux sections d'un même tube de champ (voir chapitre d'analyse vectorielle).

Partons de la quatrième équation, dans le cas historique, c'est-à-dire le régime quasi-stationnaire étudié plus loin ; l'équation se ramène alors à :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}$$

Imaginons une courbe fermée orientée Γ, découpée en éléments $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ limitant une surfaces Σ, orientée par la règle du tire-bouchon et découpée en éléments de vecteurs surfaces $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Le théorème de STOKES conduit à :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} . \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mu_0\, I_{\mathrm{enlacée}}$$

On retrouve le théorème d'AMPÈRE d'où le nom d'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

De la même façon, la deuxième équation, avec en plus une permutation de l'intégrale dans l'espace et de la dérivation dans le temps conduit à :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_\Sigma \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Sachant que la force électromotrice e se définit par la circulation de $\overrightarrow{E}$ (voir plus tard le chapitre sur l'induction) et qu'on reconnaît le flux magnétique, c'est-à-dire de $\overrightarrow{B}$, on retrouve la loi de FARADAY :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{mag}}{\mathrm{d}t}$$

La deuxième équation de MAXWELL s'appelle donc aussi équation de MAXWELL-FARADAY. Remarquons en outre que le choix de la surface s'appuyant sur Γ est parfaitement arbitraire car $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif ; ceci assure une cohérence interne aux équations.

XVIII-5 Aspects énergétiques

XVIII-5.a Remarques préalables

Considérons un condensateur chargé : entre ses plaques règne un champ électrique et en même temps, il accumule une énergie $(1/2)\,C\,U^2$; il n'est pas insensé de supposer que là où règne un champ électrique, il y a de l'énergie.

Considérons un solénoïde parcouru par un courant : il y règne un champ magnétique et en même temps, il accumule une énergie $(1/2)\,L\,I^2$; il n'est pas insensé de supposer que là où règne un champ magnétique, il y a de l'énergie.

Ces deux remarques vont dans le sens de l'existence d'une densité volumique d'énergie qu'on notera u.

Supposons maintenant qu'après avoir passé brillamment écrits et oraux des concours, nous nous allongions au soleil d'une plage de Saint-Tropez : immanquablement nous serions brûlés au troisième degré au bout d'une heure de ce régime et regretterions amèrement nos cours de physique. C'est donc que les ondes électromagnétiques émises par le soleil et qui se sont propagées dans le vide pendant cent cinquante millions de kilomètres ont transporté de l'énergie. Nous sommes donc amenés à concevoir l'existence d'une densité de courant d'énergie qu'on appellera désormais vecteur de POYNTING et qu'on notera $\overrightarrow{\Pi}$.

XVIII-5.b L'équation de POYNTING

Si l'énergie électromagnétique se conservait, on aurait entre u et $\overrightarrow{\Pi}$ la même relation qu'entre ρ et $\overrightarrow{\jmath}$ pour exprimer la conservation de la charge mais nous venons de voir que le champ électromagnétique transfère aux charges une puissance volumique $\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{E}$. Si nous reprenons le raisonnement correspondant, il faut dans la seconde approche ajouter à la puissance sortante (analogue à l'intensité sortante) la puissance transférée aux charges avec le signe négatif soit :

$$-\iiint_\Omega \overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}\Omega$$

et la suite du raisonnement aboutit alors à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{E} = 0$$

Reste à identifier u et $\overrightarrow{\Pi}$ à partir des équations de Maxwell ; la démarche heuristique est trop technique pour être intéressante et nous nous contenterons de vérifier que :

$$u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\overrightarrow{B}^2$$

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}$$

conviennent.

Grâce aux équations de Maxwell, on tire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0\,\overrightarrow{E}.\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{B}.\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{E}.\left(\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} - \overrightarrow{\jmath}\right) - \frac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}$$

Nous admettrons par ailleurs la formule suivante d'analyse vectorielle, aisée du reste à démontrer à partir des définitions :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}.\overrightarrow{B} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}.\overrightarrow{E}$$

On aboutit ensuite aisément à la relation de Poynting :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{E} = 0$$

Comprenons que l'énergie contenue dans un volume élémentaire $\mathrm{d}\Omega$ est $\mathrm{d}\mathcal{E} = u\,\mathrm{d}\Omega$ où $u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\overrightarrow{B}^2$ et que la puissance qui traverse une surface élémentaire de vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est $\overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ où $\overrightarrow{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}$.

XVIII-6 Potentiels

XVIII-6.a Existence

Grâce au cours d'analyse vectorielle, nous savons que, puisque la divergence du champ magnétique est nulle, celui-ci est le rotationnel d'un autre champ vectoriel. On note donc :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

et l'on appelle $\overrightarrow{A}$ potentiel vecteur magnétique, abrévié en pratique en potentiel vecteur.

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right)$$

Un champ de rotationnel nul est le gradient d'un champ scalaire ; l'usage est de le noter négativement, soit :

$$\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

où V s'appelle potentiel scalaire électrique, abrévié en potentiel électrique. Retenons qu'il existe deux potentiels V et $\overrightarrow{A}$ tel que :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

On fera bien attention au terme $-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ qui s'ajoute à $-\overrightarrow{\text{grad}}V$ en dehors de l'électrostatique.

XVIII-6.b Non-unicité

Considérons maintenant un champ scalaire arbitraire f et formons $V_1 = V - \partial f/\partial t$ et $\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f$ et calculons $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A_1}$; comme le rotationnel d'un gradient est nul, $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

De même $-\overrightarrow{\text{grad}}V_1 - \partial\overrightarrow{A_1}/\partial t = -\overrightarrow{\text{grad}}V + \overrightarrow{\text{grad}}(\partial f/\partial t) - \partial\overrightarrow{A}/\partial t - \partial\overrightarrow{\text{grad}}f/\partial t = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \partial\overrightarrow{A}/\partial t = \overrightarrow{E}$

C'est dire que les couples $(V_1, \overrightarrow{A_1})$ et $(V, \overrightarrow{A})$ définissent le même champ électromagnétique : à un champ électromagnétique donné correspondent une infinité de couples de potentiels possibles.

On peut aller plus loin et imposer aux potentiels une relation qui facilite les développements ultérieurs, ce n'est pas l'objet de ce programme et nous nous arrêterons là.

XVIII-7 Régimes permanents

Dans ce cas, les dérivées temporelles sont nulles dans toutes les relations que nous venons de voir.

En particulier, l'équation de conservation de la charge devient $\text{div}\,\overrightarrow{\jmath} = 0$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\jmath}$ est à flux conservatif. Comme un fil électrique canalise le courant et fait donc office de tube de champ (on dit aussi ici tube de courant), le flux de $\overrightarrow{\jmath}$ (l'intensité électrique, bien sûr) est identique en tous les points du circuit. Certes on le sait depuis longtemps, mais c'en est la justification profonde.

Dans le reste des équations rencontrées, il y a découplage entre relations électrostatiques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$
$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$$

et relations magnétostatiques :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

Nous admettrons sans démonstration que ces équations conduisent aux théorèmes étudiés en PCSI : Le calcul des champs s'effectue, si la symétrie le permet, par les théorèmes de Gauss et d'Ampère, sinon par intégration des $\mathrm{d}q/4\,\pi\,\varepsilon_0\,r$ pour V, puis $\overrightarrow{E}$ par le gradient de V changé de signe et par la formule de Biot et Savart pour $\overrightarrow{B}$. Vous êtes bien sûr invités à vous replonger là-dedans.

XVIII-8 Indications sur le cas général

Nous nous contenterons ici d'affirmer sans démonstration, qu'apparaîtront dans les champs créés à l'instant t, en un point P par des charges ou courants situés au point M (et en notant $r = \|\overrightarrow{MP}\|$) , la densité de charge ou de courant calculée en $t - r/c$, ce qui est caractéristique d'un phénomène propagatif à la vitesse c. Nous en verrons un exemple dans un chapitre ultérieur traitant du rayonnement d'un dipôle oscillant.

XVIII-9 Approximation des régimes quasi-stationnaires

XVIII-9.a Définition et conséquences

L'approximation des régimes quasi-stationnaires se définit par le fait que $\varepsilon_0\,\partial\overrightarrow{E}/\partial t$ est négligeable devant $\overrightarrow{\jmath}$ donc qu'on peut faire l'approximation :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}$$

On a dejà vu que le théorème d'Ampère est alors valable. Si nous prenons la divergence de la dernière relation et puisque la divergence d'un rotationnel est nulle, on en déduit que $\overrightarrow{\jmath}$ est à divergence nulle ; là encore la conséquence est que l'intensité est la même en tout point d'un circuit à un instant donné.

Remarquons qu'on retrouve les lois de la magnétostatique :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

En particulier la formule de Biot et Savart reste valable à un instant donné ; par exemple le lien entre intensité et champ magnétique dans un solénoïde est le même en continu et en quasi-stationnaire.

Par contre, les lois de l'électrostatique ne sont plus valables : nous verrons comment gérer cette situation dans un chapitre ultérieur consacré à l'induction.

XVIII-9.b Critère de validité

Par chance, il y a un moyen très simple de savoir *a priori* si l'on est ou non dans le cadre de l'approximation : il suffit que le remplacement de I par $I(t)$ dans la formule de Biot et Savart ne soit pas incompatible avec le fait que doit figurer $t - r/c$ au lieu de t, donc que r/c soit négligeable. Négligeable, oui mais... devant quoi ? Par exemple en sinusoïdal devant la période T, donc que $r = \|\overrightarrow{MP}\|$ soit négligeable devant $c\,T = \lambda$, en réintroduisant une notion de physique des phénomènes propagatifs sinusoïdaux. M désignant un des points où se trouve charges ou courants et P un des points où l'on calcule les champs, ceci n'est possible que si l'on renonce à calculer les champs dans tout l'espace (r pourrait alors être arbitrairement grand) pour se limiter à un laboratoire, voire une paillasse où l'on trouve à la fois les points M et les points P

Fixons un ordre de grandeur : pour une paillasse de plus gande dimension $r_{max} = 3\,\mathrm{m}$; on veut $c\,T \gg r_{max}$, soit avec $c = 3.10^8\,\mathrm{m.s^{-1}}$, $T \gg 10^{-8}\mathrm{s}$, disons $T > 10^{-6}\mathrm{s}$ soit $f < 10^6\mathrm{Hz} = 1\mathrm{MHz}$. Il se trouve que les générateurs basse-fréquence des TP ne montent justement pas beaucoup plus haut que 1 MHz, donc, en TP, on est dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire. Tant mieux !